第27卷 第4期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0693-06

复 Ginzburg-Landau 方程的数值模拟

裴琴娟[1]， 杨忍军[2]， 许秋滨[2]

(1- 常州纺织服装职业技术学院，常州 213164； 2- 南京审计学院数学与统计学院，南京 211815)

摘　要: 本文对复 Ginzburg-Landau 方程的周期边界问题构造了三个数值格式。其中两个差分格式的精度分别为 $O(\tau^2+h^2)$，谱方法的精度为 $O(\tau^2+h^m)$，其中 m 为方程的光滑度。用线性化分析的方法给出了格式的稳定性条件，并给出了数值实验。数值实验表明，四阶紧致格式的计算效果最好，既能达到较高的计算精度又能节省大量的计算时间。

关键词: Ginzburg-Landau 方程；紧致差分格式；谱方法；稳定性

分类号: AMS(2000) 65N06　　　**中图分类号**: O241.82　　　**文献标识码**: A

1　引言

复 Ginzburg-Landau 方程 (CGLE) 的动力学性质引起了人们的极大兴趣[1]。复 Ginzburg-Landau 方程在许多方面有着重要的应用，如二维热对流，半导体激光，非线性光纤。在大多数应用中，都用到了此方程的周期边界条件。本文就研究如下形式的 CGLE 方程

$$\mathrm{i}u_t+\frac{1}{2}u_{xx}+(1+\mathrm{i}R)|u|^2u=\mathrm{i}u,\quad u(a,t)=u(b,t),\quad u(x,0)=u_0(x),\tag{1}$$

其中 $x\in[a,b]$，$t\in(0,+\infty)$，$u(x,t)$ 为复函数，R 为正实数，令 $L=b-a$，则 L 为方程的一个周期。文献 [2] 给出了方程的一些动力学性质，并对于不同的初值条件画出了方程解的模的图像，但是没有给出具体的数值格式，本文的主要工作就是给出了计算此方程的三个数值格式。本文是如下安排的：在第 2 节给出了两个数值格式，第 3 节给出了格式的稳定性线性化分析，第 4 节分析了一下方程的平面波解，第 5 节给出了数值实验。

2　数值格式

取空间步长 $h=(b-a)/M$，M 为偶数，时间步长为 τ，则

$$x_j=a+jh,\quad t_n=n\tau,\quad j=0,1,\cdots,M,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

本文所用的符号如下

$$(u_j^n)_t=(u_j^{n+1}-u_j^n)/\tau,\quad (u_j^n)_{xx}=(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)/h^2,$$

与文献 [1] 类似，我们把方程 (1) 从 t_n 到 t_{n+1} 分为两步计算，首先求方程

$$\mathrm{i}u_t+(1+\mathrm{i}R)|u|^2u=0,\tag{2}$$

收稿日期: 2008-10-30.　**作者简介**: 裴琴娟 (1979年7月生)，女，讲师. 研究方向：应用数学.

再求解方程

$$\mathrm{i}u_t + \frac{1}{2}u_{xx} = 0. \tag{3}$$

格式 1 对方程 (2) 精确求解，对 (3) 用二阶隐式差分格式，得如下的分裂格式

$$u_j^* = \mathrm{e}^{\tau[1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}R)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n,$$

$$\mathrm{i}(u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau + \frac{1}{4}\left[(u_j^{n+1})_{xx} + (u_j^n)_{xx}\right] = 0, \quad j = 0,1,2,\cdots,M-1,$$

此格式的精度为 $O(\tau^2 + h^2)$。

格式 2 对 (3) 用四阶紧致格式[3]，即用算子

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}D_x^2\right)^{-1} D_x^2$$

逼近二阶微商算子 $\frac{\partial}{\partial x^2}$，得如下格式

$$u_j^* = \mathrm{e}^{\tau[1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}R)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n,$$

$$\mathrm{i}(u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h^2}{12}D_x^2\right)^{-1} D_x^2(u_j^{n+1} + u_j^*) = 0, \quad j = 0,1,2,\cdots,M-1,$$

此格式的精度为 $O(\tau^2 + h^4)$。

格式 3 与文献 [1] 类似，我们用谱方法进行计算

$$u_j^* = \mathrm{e}^{\tau[1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}R)|u_j^n|^2]} \cdot u_j^n,$$

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-M/2}^{M/2-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_l^2\tau/2}\hat{u}_l^* \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_l(x_j-a)}, \quad j = 0,1,2,\cdots,M-1,$$

其中

$$\mu_l = \frac{2\pi l}{b-a}, \quad \hat{u}_l^* = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} u_j^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_l(x_j-a)}, \quad l = -\frac{M}{2},\cdots,\frac{M}{2}-1,$$

此格式的精度为 $O(\tau^2 + h^m)$，m 为方程 (1) 的光滑度。

3 格式稳定性的线性化分析

下面我们用线性化的分析方法分析格式的稳定性，令 $u_j^n = \xi^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$，代入格式 1 得

$$u_j^* = \mathrm{e}^{\tau[1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}R)|\xi^n|^2]} \cdot \xi^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta},$$

$$-\frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\mathrm{i}r}{2}\right)u_j^{n+1} - \frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j+1}^{n+1} = \frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j-1}^* + \left(1 - \frac{\mathrm{i}r}{2}\right)u_j^* + \frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j+1}^*,$$

其中 $r = \frac{\tau}{h^2}$。因为 $u_j^{n+1} = \xi^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$，代入上式并化简得 $\xi^{n+1} = G_1(\xi, r, \theta)\xi^n$，其中

$$G_1(\xi, r, \theta) = \mathrm{e}^{\tau[1-R|\xi^n|^2]} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}r|\xi^n|^2} \cdot \frac{1 - \frac{\mathrm{i}r}{2} + \frac{\mathrm{i}r}{2}\cos\theta}{1 + \frac{\mathrm{i}r}{2} - \frac{\mathrm{i}r}{2}\cos\theta}.$$

格式稳定的充要条件是 $|G_1(\xi,r,\theta)|\le 1$，得 $\mathrm{e}^{\tau[1-R|\xi^n|^2]}\le 1$，即 $|\xi^n|^2\ge\frac{1}{R}$，这与方程自身的性质有关，与网格比 r 无关，格式 1 绝对稳定。

对于格式 2，将 $u_j^n=\xi^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$ 代入得

$$u_j^*=\mathrm{e}^{\tau[1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}R)|\xi^n|^2]}\cdot\xi^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta},$$

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{12}-\frac{\mathrm{i}r}{4}\Big)u_{j-1}^{n+1}+\Big(\frac{5}{6}+\frac{\mathrm{i}r}{2}\Big)u_j^{n+1}-\Big(\frac{1}{12}-\frac{\mathrm{i}r}{4}\Big)u_{j+1}^{n+1}\\=&\Big(\frac{1}{12}+\frac{\mathrm{i}r}{4}\Big)u_{j-1}^*+\Big(\frac{5}{6}-\frac{\mathrm{i}r}{2}\Big)u_j^*+\Big(\frac{1}{12}+\frac{\mathrm{i}r}{4}\Big)u_{j+1}^*,\end{aligned}$$

因为 $u_j^{n+1}=\xi^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$，代入上式并化简得 $\xi^{n+1}=G_2(\xi,r,\theta)\xi^n$，其中

$$G_2(\xi,r,\theta)=\mathrm{e}^{\tau[1-R|\xi^n|^2]}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|\xi^n|^2}\cdot\frac{\frac{5}{6}-\frac{\mathrm{i}r}{2}+(\frac{1}{6}+\frac{\mathrm{i}r}{2})\cos\theta}{\frac{5}{6}+\frac{\mathrm{i}r}{2}+(\frac{1}{6}-\frac{\mathrm{i}r}{2})\cos\theta}.$$

我们可以得到与格式 1 相同的结论，格式的稳定性与方程的自身性质有关，与网格比 r 无关。

对于格式 3，由 Parseval 定理知

$$\begin{aligned}\|u^{n+1}\|^2&=(b-a)\sum_{l=-M/2}^{M/2-1}(u_l^*)^2=h\sum_{j=1}^{M}|u_j^*|^2\\&=\mathrm{e}^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]}\cdot h\sum_{j=1}^{M}(\xi^n)^2=\mathrm{e}^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]}(b-a)(\xi^n)^2,\end{aligned}$$

我们可得 $(\xi^{n+1})^2=\mathrm{e}^{2\tau[1-R|\xi^n|^2]}(\xi^n)^2$，所以我们有与格式 1 和格式 2 相同的结论。

4　格式的平面波解

方程 (1) 有如下形式的平面波解，令

$$u(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi x}{p})+\omega t},\quad p=\frac{b-a}{2},$$

k 为整数，代入 (1) 得

$$A=\pm\frac{1}{\sqrt{R}},\quad \omega=-\frac{k^2\pi^2}{2p^2}+\frac{1}{R},$$

不妨取 $A=\frac{1}{\sqrt{R}}$，此时

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi x}{p})+\omega t},$$

其离散形式为

$$u(x_j,t^n)=R^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi(a+jh)}{p})+\omega t},$$

我们将其代入格式 1 至格式 3 验证格式的精度。

对于格式 1，我们有

$$-\frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j-1}^{n+1}+\Big(1+\frac{\mathrm{i}r}{2}\Big)u_j^{n+1}-\frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j+1}^{n+1}=\Big[\frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j-1}^n+\Big(1-\frac{\mathrm{i}r}{2}\Big)u_j^n+\frac{\mathrm{i}r}{4}u_{j+1}^n\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/R},$$

又 $u_j^{n+1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}u_j^n$，代入上式并作 Taylor 展开得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\frac{1}{R})\tau}=1-\frac{\mathrm{i}\tau k^2\pi^2}{2p^2}+O(\tau^2+h^2),$$

所以有

$$\omega=-\frac{k^2\pi^2}{2p^2}+\frac{1}{R}+O(\tau^2+h^2),$$

同理对于格式 2，得

$$\omega=-\frac{k^2\pi^2}{2p^2}+\frac{1}{R}+O(\tau^2+h^4).$$

对于格式3，将

$$u(x_j,t^n)=\frac{1}{\sqrt{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi(a+jh)}{p})+\omega t}$$

代入得

$$u_j^*=R^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau/R+\omega n\tau)}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi jh}{p}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}ak\pi}{p}},$$

$$\hat{u}_l^*=\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}u_j^*\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}lj\pi h}{p}}=\begin{cases}0, & l\neq k,\\ A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau/R+\omega n\tau)}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}ak\pi}{p}}, & l=k,\end{cases}$$

从而有

$$u_j^{n+1}=R^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau/R+\omega n\tau)}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi jh}{p}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}ak\pi}{p}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k^2\pi^2\tau}{2p^2}},$$

整理得

$$\omega=-\frac{k^2\pi^2}{2p^2}+\frac{1}{R},$$

平面波解可以精确的满足格式 3。

5 数值实验

下面我们用数值实验来验证格式的有效性。

5.1 平面波解

取 $a=-6,\ b=6,\ k=1,\ h=3/8,\ \tau=0.05,\ T=10.0$，误差我们定义为

$$L_\infty=\max_j|u_j^n-u(x_j,t^n)|,$$

此时相对误差定义为 $L_1=L_\infty/A$，对于不同的 R 计算结果如下表 1。

由表 1 可以看出，格式一的计算精度是最差的，但是所用的时间比较少。格式 2 的精度是非常好的，当 R 比较小时，甚至可以超过格式 3 的精度，但所用的时间与格式 1 相当。格式 3 的精度是最好的 (当 R 较大时)，然而所用时间要比格式 1，格式 2 大的多。综上所述，在要求一定精度的情况下，格式 2 是最好的，既能达到较高的精度，又能耗费少量的时间。

5.2 周期解

$$R=2.0,\quad u_0(x)=R^{-1/2}(1.0+\mathrm{i}\cos x),\quad x\in[0,2\pi],\quad h=\pi/32,\quad \tau=0.05,$$

分别用格式 2 画出 $|u_j^n|$，如图 1。数值实验 5.1 和 5.2 验证了我们的格式的有效性和可靠性。

表 1: 格式 1 至格式 3 的误差比较

R	格式	L_∞	L_1	cpu-time(s)
0.5	1	6.22(-3)	1.04(-3)	6.0(-3)
	2	1.00(-5)	1.67(-6)	1.0(-2)
	3	5.20(-4)	2.80(-5)	0.19
5.0	1	1.96(-3)	3.27(-4)	1.0(-2)
	2	3.10(-6)	5.16(-7)	1.0(-2)
	3	1.33(-6)	2.21(-7)	0.19
10.0	1	1.39(-3)	2.32(-4)	1.0(-2)
	2	2.19(-6)	3.65(-7)	1.0(-2)
	3	5.80(-7)	9.67(-8)	0.19
15.0	1	1.13(-3)	1.88(-4)	1.0(-2)
	2	1.78(-6)	2.96(-7)	1.0(-2)
	3	4.78(-7)	7.96(-8)	0.18

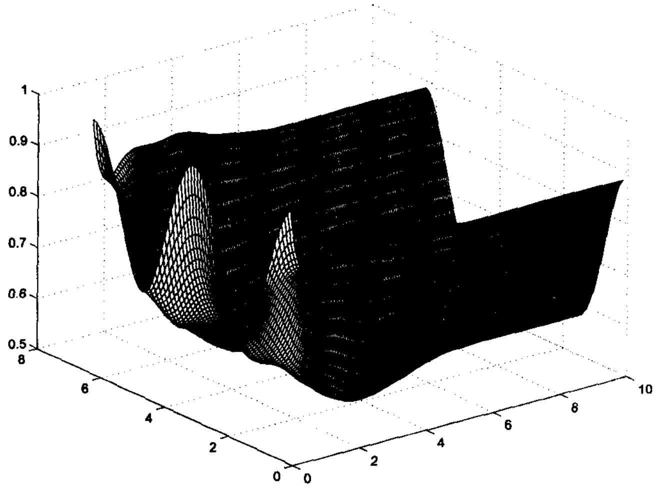

图 1: 格式 2 计算的 $|u_j^n|$

参考文献:

[1] 葛永斌，田振夫，吴文权. 二维抛物型方程的高精度多重网格法[J]. 应用数学，2003, 16(2): 13-18
Ge Y B, Tian Z F, Wu W Q. A high accuracy multigrid method for the 2·D parabolic equation[J]. Mathematica Applicata, 2003, 16(2): 13-18

[2] Bao W, Jin S, Markowich P A. On time-splitting spectral approximations for the Schrödinger equation in the semiclassical regime[J]. Journal of Computional Physics, 2002, 175: 487-524

[3] 秦新强，马逸尘. 对流占优扩散方程的改进特征差分算法[J]. 工程数学学报，2002, 19(4): 51-56
Qin X Q, Ma Y C. A kind of modified characteristic-difference schemes for convection-diffusion equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(4): 51-56

[4] 黄健，戴正德. 二维广义 Ginzburg-Landau 方程在 Banach 空间的指数吸引子[J]. 工程数学学报，2004, 21(3): 443-447
Huang J, Dai Z D. Exponential attractor for the derivative two-dimensional Ginzburg-Landau equation in Banach spaces[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(3): 443-447

[5] 马逸光，梅立永，王何露. 偏微分方城现代数值方法[M]. 上海：科学出版社，2006
Ma Y G, Mei L Y, Wang H L. Modern Numerical Methods for Partial Differencial Equations[M]. Shanghai: Science Press, 2006

Numerical Methods for the Complex Ginzburg-Landau Equation

PEI Qin-juan[1], YANG Ren-jun[2], XU Qiu-bin[2]

(1- Department of Information Technology, Changzhou Textile Garment Institute, Changzhou 213164;
2- Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815)

Abstract: In this paper, three numerical schemes are studied for the complex Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions. The truncation error of the two difference schemes are $O(\tau^2+h^4)$. The truncation error of the spectral method is $O(\tau^2+h^m)$, where m denotes the smoothness of the differential equation. The stability of three schemes is analyzed by a linear method, and numerical experiments denote that our schemes are effective and reliable. The computing results demonstrate that the fourth order compact scheme is the best, which can reach a high accuracy with shorter computing time.

Keywords: Ginzburg-Landau equation; compact difference scheme; spectral method; stability

Received: 30 Oct 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.